



# REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM

<https://revista.amiutem.edu.mx>

Publicación periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores  
del Uso de Tecnología en Educación Matemática  
Volumen V      Número 1      Fecha: Junio de 2017

ISSN: 2395-955X

## Directorio

Rafael Pantoja R.  
Director

Eréndira Núñez P.  
Lilia López V.  
Lourdes Guerrero M.

Sección: Selección de  
artículos de investigación

Elena Nesterova  
Alicia López B.  
Verónica Vargas Alejo  
Sección: Experiencias  
Docentes

Esnel Pérez H.  
Armando López Zamudio  
Sección: Geogebra

**ISSN: 2395-955X**

## UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Alejandra Adame Esparza<sup>1</sup>, Mónica del Rocío Torres Ibarra<sup>2</sup>,  
Elvira Borjón Robles<sup>3</sup>

Universidad Autónoma de Aguascalientes<sup>1</sup>, Universidad  
Autónoma de Zacatecas<sup>2, 3</sup>

*alex280\_80@yahoo.com.mx, torres@matematicas.reduaz.mx,*  
*eborjon@matematicas.reduaz.mx*

## Para citar este artículo:

Esparza, A., Torres, M., y Borjón, E. (2017). Una propuesta para la enseñanza de identidades trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Electrónica AMIUTEM*. Vol. V, No. 1. Publicación Periódica de la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática. ISSN: 2395-955X. México..

Revista AMIUTEM, Año V, No. 1, Enero 2017, Publicación semestral editada por la Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C. Universidad de Guadalajara, CUCEI, Departamento de Matemáticas, Matemática Educativa. B. M. García Barragán 1421, Edificio V Tercer nivel al fondo, Guadalajara, Jal., S.R. CP 44430, Tel. (33) 13785900 extensión 27759. Correo electrónico: [revista@amiutem.edu.mx](mailto:revista@amiutem.edu.mx). Dirección electrónica: <https://revista.amiutem.edu.mx/>. Editor responsable: Dr. Rafael Pantoja Rangel. Reserva derechos exclusivos No. 042014052618474600203, ISSN: 2395.955X, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática A.C., Antonio de Mendoza No. 1153, Col. Ventura Puente, Morelia Michoacán, C.P. 58020, fecha de última modificación, 10 de julio de 2016. Las opiniones expresadas en los artículos firmados es responsabilidad del autor. Se autoriza la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes siempre y cuando se cite la fuente y no sea con fines de lucro. No nos hacemos responsables por textos no solicitados.

## UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Alejandra Adame Esparza<sup>1</sup>, Mónica del Rocío Torres Ibarra<sup>2</sup>, Elvira Borjón Robles<sup>3</sup>

*alex280\_80@yahoo.com.mx, mtorres@matematicas.reduaz.mx,  
eborjon@matematicas.reduaz.mx*

Universidad Autónoma de Aguascalientes<sup>1</sup>, Universidad Autónoma de Zacatecas<sup>2 3</sup>

**Palabras clave:** Propuesta didáctica, Visualización matemática, Identidades trigonométricas, Representaciones, GeoGebra.

### Resumen

La presente investigación, toma como referente teórico la Visualización Matemática (Zimmermann y Cunningham, 1991), con el objetivo crear una propuesta didáctica que, apoyada del software Geogebra, contribuya a la comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el nivel medio superior. Bajo la metodología de la ingeniería didáctica, se hace un análisis previo del concepto que permite estructurar una serie de actividades para promover la interrelación (tratamiento, tránsito y conversión) de representaciones, y con ello determinar el grado de comprensión que los estudiantes adquieren del concepto, de acuerdo a los niveles de visualización (Hitt, 1998) alcanzados.

**Keywords:** Teaching approach, Mathematical visualization, Trigonometric identities, Representations, Geogebra.

### Abstract

This research takes the Mathematical Visualization (Zimmermann and Cunningham, 1991), as theoretical reference, to creating a didactic approach supported by Geogebra software, that contribute to the understanding Trigonometric Identity in the upper middle level. Under the didactic engineering methodology, a previous analysis of the concept is made that allows structuring a series of activities to promote the interrelation (treatment, transit and conversion) of representations, and with that to determine the degree of understanding that the students acquire, in accordance to the gain levels of visualization (Hitt, 1998).

### Introducción

La impartición del tema de Identidades Trigonómicas en el nivel Medio Superior tradicionalmente se aborda de manera algorítmica, lo que ocasiona que la comprensión de las mismas se vea limitada al cálculo numérico.

Esta propuesta busca enriquecer este tratamiento, haciendo que los estudiantes tengan a su disposición diferentes representaciones, con las cuales puedan interactuar y lograr crear imágenes mentales que les permitan la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonómica. En este proceso, el estudiante representa, transforma, propone y logra dar sentido al objeto matemático de Identidad Trigonómica.

Basados en la Ingeniería Didáctica, (Artigue, Douady, Moreno, y Gómez, 1995), nuestra metodología considera la realización de un análisis preliminar en 3 dimensiones, como base del diseño de una situación didáctica, que será validada mediante un análisis a priori y a posteriori de la misma.

Con todo lo anterior, se diseña, valida y experimenta una secuencia de actividades con uso de tecnología (GeoGebra), como herramientas para la enseñanza y aprendizaje del tema de Identidades Trigonómicas en el nivel medio superior, con la intención de que los alumnos logren, altos niveles de comprensión (Hitt, 1998) promovidos con la construcción de redes de representaciones.

### Referente Teórico

Históricamente, la visualización ha jugado un papel muy importante en la comprensión y evolución de las matemáticas, por ejemplo, Torres (2004) menciona que:

En 1945, Jacques Hadamard, realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual (Torres, 2004, p. 20).

En la época de los Pitagóricos, la visualización era sumamente importante, ya que el descubrimiento estaba ligado a procesos visuales; más adelante, en la época de Euclides, imperan en la matemática los procesos lógico-deductivos, en los que la visualización empieza a jugar un papel secundario.

Por esta razón, consideramos que un acercamiento didáctico en el aula debe tomar en cuenta el razonamiento lógico-deductivo (formal), sin dejar de lado la parte inductiva que se promueve en la visualización:

La visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión (Hitt, 2003, p. 3).

En el mismo tenor, autores como Zimmermann y Cunningham (1991), señalan que “la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con ayuda de tecnología), usando tales imágenes efectivamente para un descubrimiento y comprensión matemática. La visualización no es el fin mismo, sino el entendimiento”.

De acuerdo a Hitt (1998), visualizar es crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la computadora para expresar la idea matemática en cuestión; aclara también que comprender un concepto implica una articulación coherente de las diferentes representaciones que intervienen durante la resolución de problemas, es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, que le darán solidez al concepto mismo.

En relación a las representaciones, Duval (1993) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. La comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación. En otras palabras, la aprehensión de un concepto sólo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos. Las

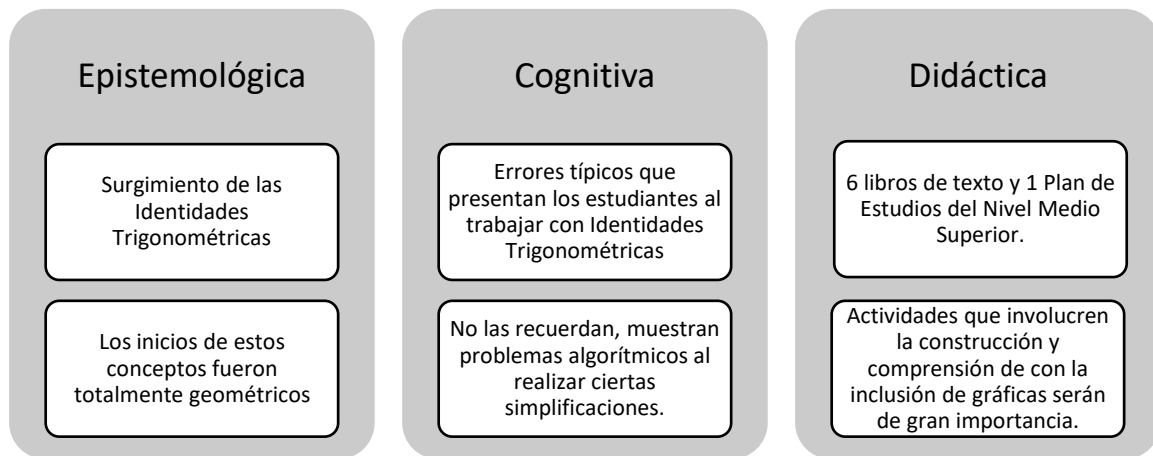
tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en cuestión.

Así pues, Se presenta el diseño de una secuencia que busca el tránsito entre representaciones semióticas (Duval, 1998), analizada bajo la visualización matemática de Zimmermann y Cunningham (1991), estrechamente ligada a los niveles de comprensión de conceptos de Hitt (1998), de los cuales se manejan 4 (Adame, 2017).

### Metodología

La concepción de la presente propuesta estuvo regida por la metodología de la Ingeniería Didáctica, que se caracteriza "por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, et al, 1995, p.36) y que consta de cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

El análisis preliminar a su vez se divide en tres dimensiones, la figura 1 muestra cada una de las dimensiones, el análisis que se realizó al respecto y los resultados obtenidos.



*Figura 1. Esquema del análisis preliminar realizado*

Tomando en cuenta las tres dimensiones del análisis preliminar, entramos a la segunda fase, concepción y análisis a priori, en la que se diseñó un instrumento interactivo que consta de una secuencia de seis actividades guiadas ligadas a ocho programas desarrollados en el software "GeoGebra", donde los estudiantes pueden interactuar con distintas representaciones del concepto de Identidad Trigonométrica.

A continuación, se describen las actividades contenidas en la secuencia, así como los principales objetivos y análisis a priori que se tiene de cada una de ellas.

**Actividad 1.** El objetivo de esta actividad es que los estudiantes deduzcan de manera intuitiva las Identidades Trigonométricas básicas. Se les pide que asocien diversas expresiones trigonométricas con una gráfica que es única para cada expresión, como se muestra en la figura 2.

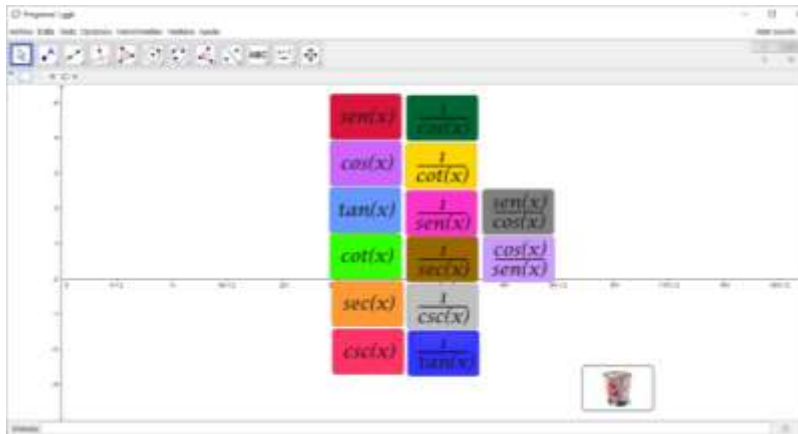


Figura 2. Entorno GeoGebra de la actividad 1

En esta sección el estudiante identifica dos tipos de representaciones del mismo ente matemático, la representación algebraica y la representación gráfica, y se espera que sea capaz de transitar entre ellas.

**Actividad 2.** El objetivo de esta actividad es que mediante la manipulación del círculo trigonométrico, los estudiantes encuentren los valores de las expresiones trigonométricas para distintos ángulos e identifiquen cuáles valores son idénticos (véase figura 3).

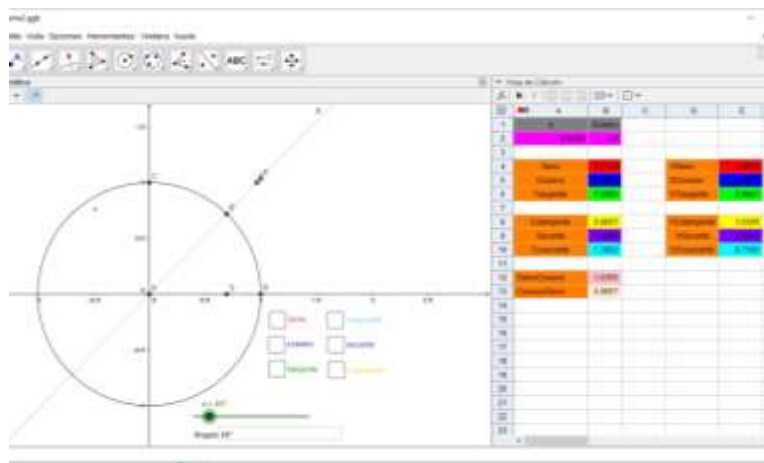


Figura 3. Representación tabular empleada en la actividad 2

En esta sección, mediante la representación tabular, podrán observar la similitud de los valores obtenidos y la equivalencia entre expresiones trigonométricas distintas

**Actividad 3.** El objetivo es que los estudiantes deduzcan la Identidad Trigonométrica  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  y comprendan su significado; se utiliza como recurso el círculo trigonométrico y el Teorema de Pitágoras (véase figura 4).

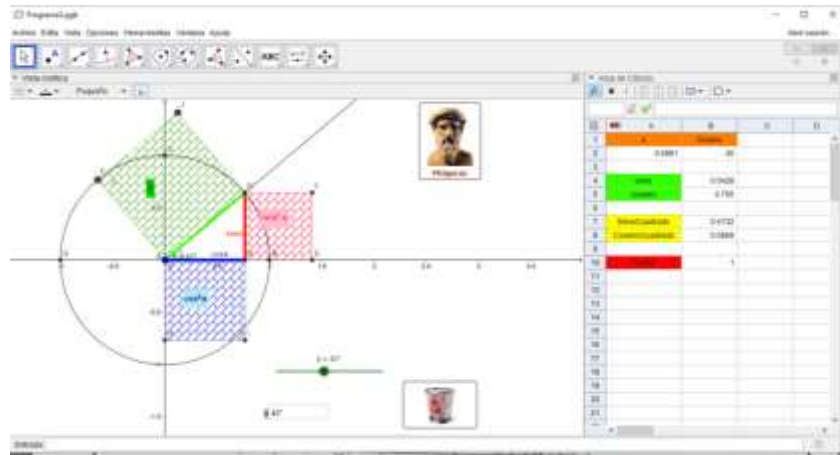


Figura 4. Representación gráfica de la actividad 3

**Actividad 4.** El objetivo es mostrar al estudiante que existen expresiones trigonométricas en apariencia iguales, pero que no son identidades trigonométricas (véase figura 5); se les muestra una supuesta equivalencia entre expresiones trigonométricas y se le cuestiona de qué manera se podría saber si la expresión es verdadera. Se espera que el estudiante haga referencia en su respuesta a alguna de las alternativas propuestas con anterioridad como son el trazo de gráficas y/o la tabulación.

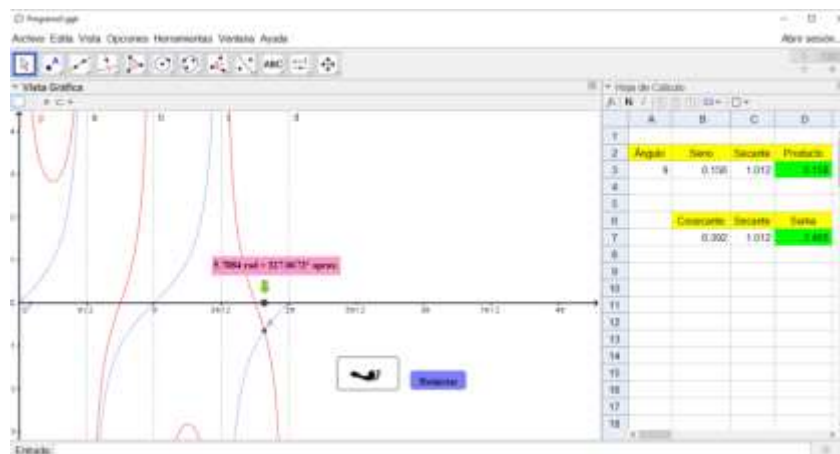


Figura 5. Ambiente de trabajo de la actividad 4

En esta actividad se les define el concepto formal de Identidad Trigonométrica y se les pide que saquen sus propias deducciones. Se espera que el estudiante concluya que la expresión trabajada no es identidad porque no es válida para todos los valores de ángulos.

**Actividad 5.** Su objetivo es mostrar al estudiante que los valores de cualquier ángulo en expresiones trigonométricas equivalentes hacen verdadera la identidad. Se muestra una equivalencia entre expresiones trigonométricas (figura 6) y mediante el trazo de gráficas y evaluaciones en diversos ángulos en una representación tabular, van descubriendo que realmente se trata de una equivalencia.

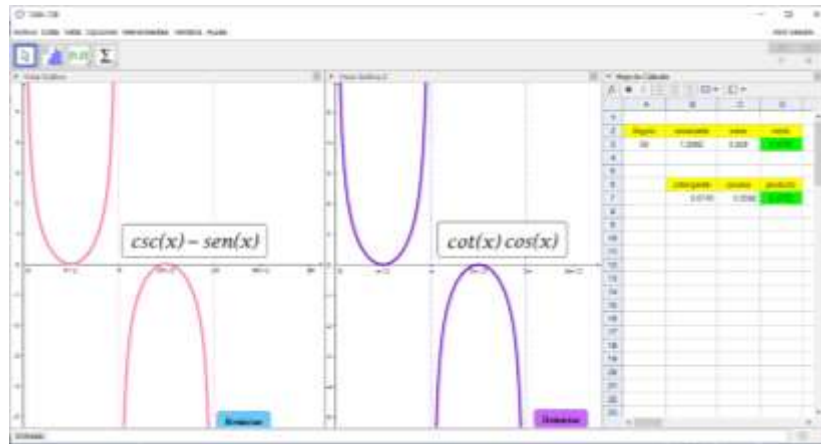


Figura 6. Entorno gráfico y tabular utilizado en la actividad 5

**Actividad 6.** En esta actividad se busca introducir un método para comprobar una equivalencia de manera algorítmico-formal, sin necesidad de obtener valores para casos particulares (véase figura 7). Se muestran los gráficos de ambos lados de la equivalencia y el estudiante va haciendo modificaciones en las expresiones encontrando que existen cambios que perjudican las gráficas iniciales y otros cambios que mantienen las gráficas intactas.

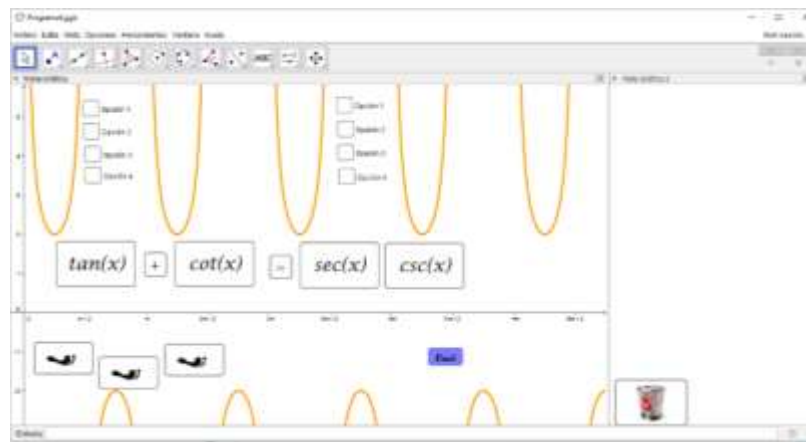


Figura 7. Entorno de trabajo para la actividad 6

La segunda fase de la metodología, se refiere a la experimentación; ésta se llevó a cabo en el del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes (CEM-UAA) con un grupo mixto de 51 estudiantes (33 mujeres y 18 hombres) del segundo semestre (véase figura 8), cuyas edades oscilaban entre los 15 y 16 años; se realizó en el aula habitual de clases, contando con varias computadoras portátiles para el desarrollo de las actividades en GeoGebra.





*Figura 8.* Grupo de estudiantes trabajando en la propuesta

En todo el momento el docente-investigador estuvo presente como guía, coordinando los tiempos de cada una de las actividades y dando retroalimentaciones pertinentes y oportunas.

En total se aplicaron 6 actividades en un lapso de 7 días, en sesiones de aproximadamente 50 minutos en donde los estudiantes interactuaron con el software, al mismo tiempo que completaban las actividades de la secuencia.

Una vez concluida esta etapa, nuestra metodología propone realizar un Análisis a Posteriori, que consiste en una confrontación entre lo esperado y lo ocurrido; para ello, se procedió a hacer una revisión de las respuestas de los estudiantes, implementando una codificación de las redes de representación (tratamientos, coordinaciones y conversiones), logradas por cada estudiante (Adame, 2017), con la finalidad de determinar el nivel de visualización (Hitt, 1998) alcanzada, un el ejemplo de esto se presenta en la figura 9.

	Pregunta 1	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 3
	TT+	CT->A	CT->A	CT->V	CA->V
E_1	0	0	1	1	0
E_2	1	0	2	1	0
E_3	0	0	0	1	0
E_4	0	0	0	1	0
E_5	1	0	1	1	0

*Figura 9.* Ejemplo de codificación y condensado de respuestas

## Resultados

Los resultados que se muestran a continuación representan una síntesis de las tablas de codificación creadas para ubicar a los alumnos en los diferentes niveles de visualización de acuerdo al número de interrelaciones realizadas de manera satisfactoria en las actividades planteadas.

En actividad 1, si el estudiante identificó que existen expresiones trigonométricas distintas que producen las mismas gráficas completaría las especificaciones del nivel 2 de visualización.



¿Qué otras gráfica encuentras parecidas?

$\frac{1}{\csc x}$	$\sin x$	
$\cot x$	$\frac{\cos x}{\sin x}$	$\frac{1}{\tan x}$
$\frac{1}{\cot x}$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin x}$	$\csc x$	
$\frac{1}{\cos x}$	$\sec x$	
$\cos x$	$\frac{1}{\sec x}$	

Figura 10. Respuesta de un estudiante nivel 2 en actividad 1

Logramos observar que en general, los estudiantes pueden identificar similitudes en la representación gráfica y que existen expresiones trigonométricas (en apariencia distintas) que producen las mismas gráficas.

Respecto a la actividad 2, se esperaba que el estudiante, pudiera observar la similitud de los valores numéricos de las distintas identidades, presentadas en una representación tabular con diferentes ángulos; con ello serían capaces de transitar del registro tabular al algebraico; sus respuestas nos dejan ver que lograron identificar la equivalencia de las identidades presentadas en la actividad (ver figura 11) y con ello ubicarse en el nivel 3 de visualización.

¿Cómo escribirías lo observado a manera de fórmula?

$$\frac{1}{\sin x} = \csc \quad \frac{1}{\cos x} = \sec \quad \frac{1}{\tan x} = \cot \quad \frac{1}{\cot x} = \tan \quad \frac{1}{\sec x} = \cos \quad \frac{1}{\csc x} = \sin$$

Cambian de

Figura 11. Respuesta de alumno en la actividad 2

En la actividad 3, con ayuda de la representación gráfica y tabular, los estudiantes identifican lo que sucede con la suma del  $\sin^2 x$  y  $\cos^2 x$  para distintos valores de ángulos, con ello, pueden deducir una expresión matemática (ver figura 12) adquirir el nivel 1 de visualización.

¿Cuál sería la expresión matemática que represente los comportamientos observados?

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Figura 12. Respuesta obtenida en la actividad 3

En la actividad 4, tras trabajar con una expresión que no representa una identidad, poco a poco, con ayuda de la representación de gráfica y aritmética presentada en distintos valores particulares, logran identificar la falsedad (ver figura 13), e indicar que no se trata de una identidad.

De acuerdo a la definición anterior. ¿Qué concluirías de la expresión trabajada en este ejercicio? Justifica ampliamente tu respuesta.

La expresión que se muestra en el punto 1, no es una Identidad trigonométrica, pues no se cumple con todos los ángulos, solo con algunos. Y me pude dar cuenta al hacer las gráficas y la tabla de ángulos y en ninguna ocasión resultaron iguales los valores.

Figura 13. Respuesta de un estudiante, pregunta Actividad 4

En la actividad 5, se pretende que una vez que detectaron cuándo una ecuación trigonométrica no es una identidad, tengan elementos para identificar cuándo ésta se cumple, se les presenta una en particular en representación gráfica y tabular; esperando que ellos lo deduzcan, como se muestra en la figura 14.

¿Cómo podríamos saber si la expresión anterior es verdadera?, es decir, ¿cómo podríamos saber si se trata de una Identidad Trigonométrica o no? Describe posibles sugerencias para solucionar esta interrogante.  
Usando otras igualdades. Resolviendo las dos expresiones y poder ver las similitudes y compararlos entre sí.

Figura 14. Respuesta de alumno en actividad 5

Casi al término de la actividad se le cuestiona al estudiante si cree que habrá una manera de probar si una expresión es verdadera o no sin utilizar un software como GeoGebra, sus respuestas (figura 15) dejan ver que hacen referencia al tipo de actividades realizadas previamente.

¿Existirá algún ángulo para el cual la igualdad anterior no se cumpla? ¿Cómo podrías encontrar dicho valor en caso de existir? Justifica tu respuesta.  
Tal vez, podríamos ver cada ángulo en una gráfica para verificar.

Figura 15. Respuesta de alumnos a formas de encontrar identidades

En relación a la última actividad de la secuencia, los estudiantes mostraron que podían identificar identidades equivalentes por diferentes métodos (ver figura 16), con lo cual podemos ver que ellos han sido capaces de desprender el concepto de su representación, es decir, apropiarse del mismo,

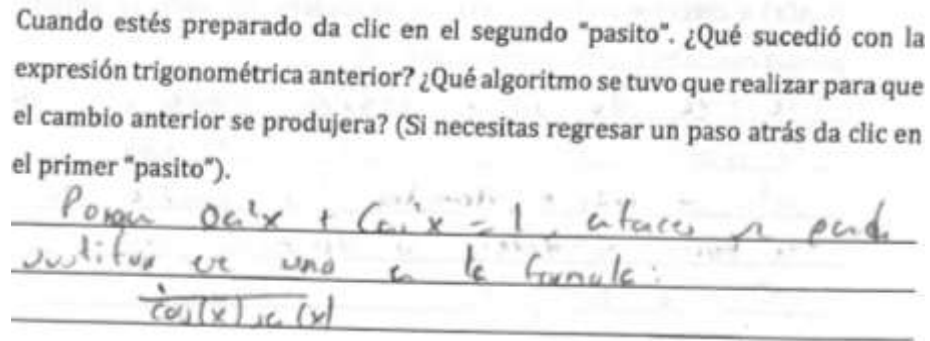


Figura 16. Respuesta de alumno a actividad 6

Con las actividades planteadas, una vez que se crearon las redes de representaciones, de los 51 estudiantes que participaron, encontramos que 46 alcanzaron un nivel 3 de comprensión, mientras que 5 fueron capaces de transformar, generar, comunicar y reflexionar sobre la información que se les presentó, lo que para nosotros los hace visualizadores en potencia, es decir, pudieron alcanzar el nivel 4, que fue el más alto que se promovió con la jnn .

### Conclusiones

En una época en donde todo cambia a pasos agigantados, es importante reflexionar sobre las formas de enseñanza en las aulas. En este sentido la tecnología puede tomar un papel relevante al momento de ser utilizada en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje, proponiendo alternativas didácticas que la incluyan.

Los resultados arrojados en este estudio dan prueba de que la visualización matemática, concebida a través de un diseño cuidadoso de actividades en el que intervienen tanto la interrelación de diversas representaciones de los objetos matemáticos como las herramientas tecnológicas, son un medio que permiten a los estudiantes desprender el objeto de sus representaciones, al tiempo que al crear redes entre estas últimas van logrando un mayor nivel de comprensión de los objetos trabajados.

La utilización de una herramienta tecnológica fue crucial para este estudio, pues favoreció de sobremanera la actitud de los estudiantes hacia el tema; además de que la representación de los objetos no habría sido posible de otro modo; aún más, la implementación de la metodología elegida, en la que se realizan diversos análisis preliminares como base principal para la concepción de la secuencia, nos permitió considerar aspectos en los que los estudiantes pudieran externar las imágenes mentales que en ellos se generan al momento de manipular el objeto en sus diferentes representaciones, creando con ello redes de representación lo suficientemente sólidas para dar muestra de la comprensión del objeto mismo.

### Referencias Bibliográficas

- Adame, A. (2017). Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior. Tesis sin publicar, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.
- Artigue, M., Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Recuperado de: <http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf>

- Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, Vol. 5*.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Diferent Representations Liked to the Concept of Function. *JMB, Journal of Mathematical Behavior*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
- Hitt, F. (2003). *Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques?* Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia.
- Programa de la Materia de Geometría y Trigonometría del Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*. Recuperado de:  
<http://www.uaa.mx/centros/cem/>
- Torres, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en matemáticas. *Miscelánea Matemática Núm. 40*.
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.